

siendo una tarea delicada para el docente. Aunque se puede considerar de antemano, al igual que algunos sitios web institucionales, cuál es la relación que pretende una actividad dada con el currículo oficial, es el juego del docente quien define y da sentido al juego del alumno y a los conocimientos involucrados. Como ocurre en clase, el docente actúa en el medio del alumno cuando elige los problemas por resolver y las condiciones del proceso de resolución. La interacción del alumno en este medio informa al docente sobre el desarrollo de sus competencias, por ejemplo, a partir de las respuestas que los alumnos dan al problema, las dificultades que encuentran en ello, etc. Por consiguiente, cualquier descripción del potencial pedagógico o competencial de un *applet* queda supeditada a la realidad de los contratos didácticos. No obstante, el análisis a priori del medio contribuye a entender el espacio de lo posible y así, ayuda a interpretar la interacción del alumno con el *applet*. Así mismo, el enfoque instrumental es útil para refinar el diseño de las actividades y alcanzar el tipo de necesidad que se crea en relación con el medio propuesto. Si todavía no es fácil diferenciar lo que depende del instrumental o del cognitivo, estamos convencidos de que ambos participan en la elaboración de las concepciones en el alumno.

## Notas

1. En algunos casos, como en el proyecto Gauss (<http://recursostic.educacion.es/gauss/web>), cada ítem didáctico contiene una construcción realizada con el software libre GeoGebra y así, se puede archivar el *applet* en el ordenador del usuario.
2. Original disponible en <http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=3>.
3. Se puede acceder a partir de <http://dmentrad.free.fr/GEOGEBRA/Maths/accueilmath.htm>.
4. Para GeoGebra 3D, se puede consultar <http://geogebra.org/trac/wiki/GeoGebra3D>, y para Cabri 3D, <http://cabri.com/es/cabri-3d.html>.

## Referencias bibliográficas

- BROUSSEAU, G. (1998): *Théorie des situations didactiques*. Grenoble. La Pensée Sauvage.
- MARGOLINAS, C. (2009): *Points de vue de l'élève et du professeur: Essai de développement de la théorie des situations didactiques* [en línea]. Université de Provence. <[http://halshs.archives-ouvertes.fr/docs/00/42/96/95/PDF/HDR\\_Margolinas.pdf](http://halshs.archives-ouvertes.fr/docs/00/42/96/95/PDF/HDR_Margolinas.pdf)>. [Consulta: abril 2011].
- MEAVILLA, V. (2011): *Geometría imposible. ¿Es posible enseñar geometría con figuras imposibles?* [en prensa].
- POIRIER, L. (2001): *Enseigner les maths au primaire, notes didactiques*. Saint-Laurent. Éditions du Renouveau pédagogique.
- RABARDEL, P. (1995): *Les hommes et les technologies*. Paris. Armand Colin.
- RESTREPO, A.M. (2008): *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de sixième*. Tesis doctoral. Grenoble. Université Joseph Fourier.
- RICHARD, P.R. (2004): *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques*. Berna. Peter Lang.
- RICHARD, P.R.; MEAVILLA, V.; FORTUNY, J.M. (2010): «Textos clásicos y geometría dinámica: estudio de un aporte mutuo para el aprendizaje de la geometría». *Revista Enseñanza de las Ciencias*, núm. 28(1), pp. 95-111.

## Referencias del autor

### Philippe R. Richard

Universidad de Barcelona y Universidad de Montréal  
[philippe.r.richard@umontreal.ca](mailto:philippe.r.richard@umontreal.ca)  
 Líneas de trabajo: didáctica de las matemáticas.

Este artículo fue solicitado por UNO. REVISTA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS en enero de 2011 y aceptado en abril de 2011 para su publicación.

## Los applets de funciones en el Proyecto Gauss

Se presentan diversos ejemplos de cómo se pueden aprovechar los applets en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en general y en el estudio de las funciones en particular. Todos los ejemplos pertenecen al Proyecto Gauss del Instituto de Tecnologías Educativas, por lo que son accesibles a toda persona interesada. Cada ejemplo añade alguna particularidad o aspecto relevante del trabajo con applets, así como reflexiones sobre el interés que puede tener su uso. En tal sentido, se destaca el protagonismo que adquieren nuestras propias acciones y la importante ayuda que supone su retroalimentación continua en un escenario visual, dinámico e interactivo.

### Functions applets at the Gauss Project

In this article we give several examples of how to make use of applets for mathematics teaching and learning in general and studying functions in particular. All the examples come from the Gauss Project at the Educational Technologies Institute, which makes them accessible to everyone interested. Each example includes a relevant aspect for working with applets, as well as some thoughts on their use. We stress the role of our own actions and the key support offered by constant feedback in a visual, dynamic and interactive setting.

José Luis Álvarez García  
 Rafael Losada  
 Instituto de Tecnologías Educativas,  
 Madrid

Palabras clave: nuevas tecnologías, actividades sobre funciones, proyecto Gauss, GeoGebra.

Keywords: new technologies, activities on functions, Gauss Project, GeoGebra.

## ■ Los applets de GeoGebra

El uso del programa libre y gratuito GeoGebra<sup>1</sup> como ayuda en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ha experimentado en los últimos años un intenso crecimiento en todo el mundo. En el momento de escribir este artículo, son ya 50 los Institutos GeoGebra, con presencia en los cinco continentes,<sup>2</sup> encargados de promover e investigar su potencial didáctico. A principios del año pasado, no llegaban a la mitad. Cinco de ellos tienen su sede en España.<sup>3</sup>

De entre los muchos aspectos destacables de este programa (Losada, 2007), las diversas facilidades que ofrece para sacarle provecho han contribuido sin duda al éxito de su difusión. Una de ellas es la posibilidad de convertir en segundos cualquier construcción de GeoGebra en un *applet*, es decir, en una pequeña aplicación integrada en una página web.

## ■ El Proyecto Gauss

El Proyecto Gauss<sup>4</sup> ha sido creado por el Instituto de Tecnologías Educativas<sup>5</sup> (ITE) como una iniciativa

que se enmarca en el Programa Escuela 2.0<sup>a</sup> con el fin de ofrecer contenidos educativos digitales que apuestan por una forma diferente y creativa de enseñar y aprender matemáticas. El hecho de que el actual director del ITE, Antonio Pérez Sanz, sea también matemático

El Proyecto Gauss cuenta con más de 500 actividades que abarcan los currículos de matemáticas de quinto y sexto de primaria (10-12 años) y de toda la educación secundaria obligatoria (12-16 años)

co y profesor ha propiciado sin duda un especial interés en su impulso. Actualmente, el Proyecto Gauss cuenta con más de 500 actividades que abarcan los currículos de matemáticas de quinto y sexto de primaria (10-12 años) y de toda la educación secundaria obligatoria (12-16 años). Los materiales están sujetos a la licencia Creative Commons, «Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 3.0». Esto significa que somos libres de copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra y crear obras derivadas, siempre que las compartamos bajo la misma licencia, reconozcamos los créditos y no sea con fines comerciales.

El diseño de construcciones y actividades es obra de dos asesores técnico-docentes del ITE, con amplia experiencia tanto en la docencia de las matemáticas como en el aprovechamiento de las nuevas tecnologías: José Luis Álvarez y Rafael Losada. Este último es también formador del Instituto GeoGebra de Cantabria<sup>7</sup> (IGC), organismo presidido por el profesor Tomás Recio con sede en el Centro Internacional de Encuentros Matemáticos,<sup>8</sup> que mantiene un convenio de colaboración con el ITE destinado a facilitar el desarrollo de actividades e investigaciones de interés común.

## ■ Los bloques de actividades

Las actividades de ESO están clasificadas en cinco grandes bloques temáticos: aritmética, álgebra, funciones, geometría y estadística-proba-

bilidad. A pesar de que la temática recorre todo el currículo, podemos observar que el bloque geométrico comprende casi un tercio de las actividades. No en vano GeoGebra –basta con ver su interfaz– puede clasificarse como un *software* de geometría dinámica<sup>9</sup> con

algunos componentes numéricos y algebraicos en una ventana dedicada, comandos de funciones y estadística, y una hoja de cálculo integrada.

En primaria, donde no aparecen los bloques de álgebra y funciones, todas las actividades enlazan bien con una versión de nivel ligeramente superior, bien con otra similar. Estos enlaces ayudan a tratar la diversidad, ya sea hacia un nivel superior (de primaria a ESO) o inferior (de ESO a primaria).

Podemos descargar todas las actividades de primaria o de ESO en sendos archivos comprimidos.<sup>10</sup> Una vez descomprimido, aparece un árbol de carpetas bastante simple. Dentro de la carpeta «ESO», por ejemplo, hay dos subcarpetas denominadas «Actividades» y «Comentarios» (respuestas orientativas). Abriendo la carpeta «Actividades», accedemos a cualquiera de los archivos de extensión HTM (página web). Todos ellos incorporan un menú general que nos permite navegar por todas las actividades.

Si deseamos modificar una construcción de GeoGebra basta abrirla en la carpeta correspondiente. Podemos adaptarla como queramos sin necesidad de convertirla de nuevo en *applet*: estos se actualizan automáticamente en las páginas web que los contienen.

## ■ Las actividades

Cada actividad incluye, además del *applet* de GeoGebra, una introducción y un cuestionario.

La introducción suele contener unas breves instrucciones generales y a veces enlaza con información complementaria. El cuestionario, pieza clave, está especialmente diseñado para guiar la manipulación del *applet* y graduar su exploración. En algunas ocasiones especiales, se ha considerado oportuno sustituir el cuestionario por algún proceso de construcción o de autoevaluación.

La relevancia del bloque de geometría no se debe a una deliberada desproporción en el número de actividades a favor de contenidos puramente geométricos, sino a un aprovechamiento del atractivo propio de la naturaleza eminentemente visual de la representación de los elementos geométricos, así como a la facilidad con la que podemos manipularlos en los *applets*.

El espíritu del Proyecto Gauss es el de orientar las actividades a la adquisición y la práctica de competencias matemáticas generales más que al adiestramiento en algoritmos particulares, a la vez que se mantiene el objetivo de mostrar la pluralidad y la interconexión de ideas y métodos matemáticos. El conocimiento y la manipulación de los elementos geométricos es, además de un fin en sí mismo, un excelente medio para ejercitar nuestras habilidades matemáticas de manera natural y visualmente atractiva.

El espíritu del Proyecto Gauss es el de orientar las actividades a la adquisición y práctica de competencias matemáticas generales más que al adiestramiento en algoritmos particulares

Recorriendo las distintas actividades encontramos una amplia variedad de situaciones ricas en contenidos matemáticos: crear nuestras propias construcciones, desvelar la mejor estrategia de algunos juegos, dibujar y analizar mosaicos, frisos y rosetones, comparar las variaciones simultáneas en diferentes representaciones matemáticas (gráficas, numéricas o algebraicas), averiguar qué se oculta tras un truco de magia, contemplar un espejo con mirada matemática,

El cuestionario, pieza clave, está especialmente diseñado para guiar la manipulación del *applet* y graduar su exploración

practicar el *kirigami* (plegado y corte de papel), simular trasvases de líquidos y llenados de botellas multiformes, comprobar el efecto de iterar la misma operación, explorar el comportamiento de figuras planas y espaciales, recorrer un grafo, contrastar distintos procedi-

mientos de resolución de ecuaciones y sistemas, proponer nuevos juegos con cerillas, buscar el orden o la pauta en distintos escenarios, realizar experimentos aleatorios, atender al engaño al que puede conducirnos confiar en la simple percepción visual, interpretar planos y mapas, practicar el cálculo mental, seccionar un hipercono, etc.

## ■ Las funciones en el Proyecto Gauss

En este artículo nos centraremos en las actividades presentes en el bloque de funciones. Este bloque se divide en tres secciones denominadas «Representaciones diversas», «Características» y «Funciones concretas».

En la propia forma de clasificar se advierte el compromiso con los aspectos generales e interconectados de las matemáticas frente a otros tipos de criterios que habitualmente originan espacios más compartimentados. De este modo, en la primera sección se acentúa la multiplicidad de las posibi-

En la propia forma de clasificar se advierte el compromiso con los aspectos generales e interconectados de las matemáticas frente a otros tipos de criterios que habitualmente originan espacios más compartimentados

lidades de representación funcional (verbal, gráfica, numérico-tabular y algebraica); en la segunda sección se muestran algunos modos de focalizar el análisis de su comportamiento, y en la tercera sección se concreta su estudio en algunas funciones elementales.

Veamos tres ejemplos de actividades de cada sección:

### Actividad 1: Representaciones diversas

En esta sección, el objetivo prioritario es ayudar a establecer conexiones mentales entre las diferentes formas de comunicar y representar una situación de dependencia funcional.

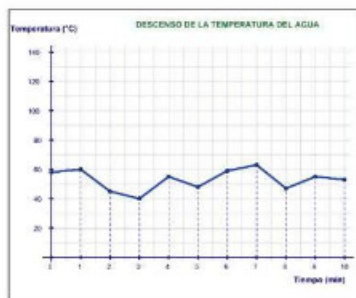
#### Enunciados, tablas y gráficas

El título de nuestro primer ejemplo es bastante explícito. Esta actividad presenta un escenario diferente para cada uno de los seis enunciados que se proponen. Uno de ellos, por ejemplo, dice:

Después de hervir, la temperatura del agua bajó rápidamente. Conforme pasaba el tiempo, el descenso de temperatura era cada vez más lento hasta que finalmente alcanzó la temperatura ambiente, que era de 25°, a los cinco minutos.

Al mismo tiempo, el *applet* muestra la siguiente tabla y gráfica:

Tiempo (min)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperatura (°C)	58	60	45	40	55	48	59	63	47	55	53



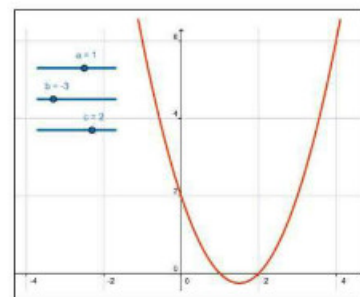
La actividad consiste en ajustar los valores de la tabla al enunciado verbal. El *applet* se encarga de ajustar automáticamente la gráfica a los cambios efectuados en la tabla. De esta forma, podemos comprobar en todo momento si los tres tipos de representación guardan coherencia o, por el contrario, se contradicen mutuamente.

Sin la presencia del *applet*, esta actividad resultaría bastante más tediosa. Gracias al *applet*, acciones como deshacer una entrada (arrepentirse o volver atrás), realizar tanteos (ensayar) y reasignar nuevos valores (reajustar) se realizan de forma ágil y entretenida. La adaptación automática de la gráfica a cada nuevo valor introducido permite intuir nuestras modificaciones como particulares variaciones en un «estado general» de la gráfica, es decir, nos aproxima al concepto de función como una sola entidad cuya representación gráfica se ajusta a los nuevos valores como una serpiente a las variaciones del terreno.

#### Coefficientes

Una de las muchas facilidades que ofrece GeoGebra es la extrema sencillez con la que podemos variar una serie de valores. La herramienta «Deslizador» permite introducir un nuevo parámetro numérico con un simple clic del ratón.

Realizar con GeoGebra la construcción que aparece en este *applet* requiere unos veinte segundos. Son más que suficientes para hacer tres clics (introducir los tres parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  con la herramienta Deslizador) y escribir  $a x^2 + b x + c$  en la barra de Entrada.



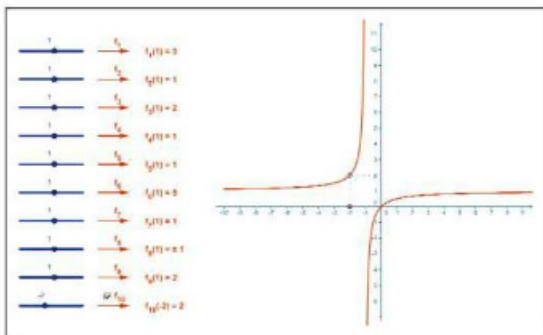
Sin embargo, esos veinte segundos abren la puerta a un sinfín de preguntas, investigaciones, conjeturas (y sus correspondientes verificaciones o refutaciones), comparaciones, etc. Logramos un acceso cómodo e intuitivo a todos los miembros de las diversas familias de funciones, ya sean polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales, logarítmicas o trigonométricas.

El estudio de unas u otras dependerá del nivel curricular, pero no del tipo de *applet* ni del modo de operando sobre él. Gracias a los deslizadores, podemos variar de forma continua el valor de cada

coeficiente. Las sucesivas gráficas resultantes de esas variaciones nos inducen a considerar cada una de ellas como parte de una misma película, como fotogramas de un mismo guión, como miembros de una misma «familia de funciones», pudiendo apreciar qué propiedades o características se mantienen independientes de los valores particulares y cuáles desaparecen y reaparecen dependiendo de ellos.

### Ley de formación

También podemos aprovechar la variación continua de los valores de los deslizadores, considerándolos ahora como variables más que como parámetros, para dirigir la atención hacia el modo en que cada función modifica el valor de la variable independiente para obtener el valor de la dependiente. En esta actividad, se propone encontrar esa ley de formación para cada una de diez funciones diferentes.



Las tablas de valores resultan un medio excelente para introducir el concepto de función, pero se corre el peligro de consolidar una interpretación discreta, a saltos, de la acción funcional. La presencia de la gráfica permite corregir esa interpretación, otorgando a cada par de valores  $(x, y)$  una vecindad estrecha con otros infinitos pares que guardan la misma relación, entre cada par de valores discretos consecutivos. Nuevamente, el dinamismo con el que visualizamos todas estas variaciones, además de subrayar algunos aspectos conceptuales, confiere a la actividad un atractivo y agilidad ausentes en una versión estática.

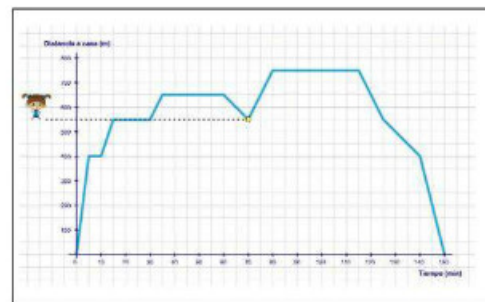
### Actividad 2: Características

En esta sección, se proponen actividades que ayuden a practicar distintas formas de observar el comportamiento de una función.

#### Una tarde de paseo

El *applet* de esta actividad se comporta como una caja negra que registra ciertas acciones durante un limitado periodo de tiempo: un paseo corriente durante una tarde. Aprender a interpretar

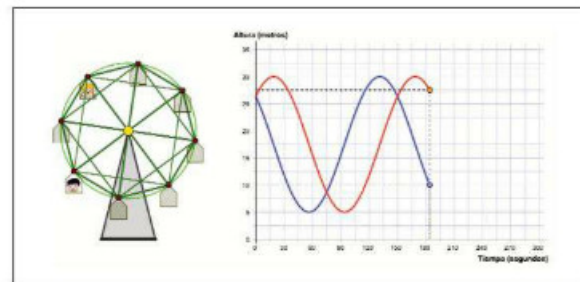
ese registro conlleva aprender a mirar de cierta forma, focalizar la atención en determinados aspectos: qué significa cada eje, qué significan las variaciones horizontales o verticales de la gráfica, qué comportamientos o puntos de la gráfica revelan información especialmente significativa, etc.



No importa tanto cómo sea el registro en sí, es decir, cómo sea la gráfica, sino cómo hay que interpretarla. Esta interpretación no siempre es evidente, muchas veces requiere un entrenamiento previo. Solo así podemos recuperar información precisa de un cardiograma o del registro de un sismógrafo, de un detector de mentiras, etc.

### La noria

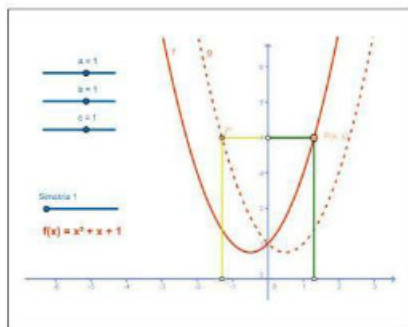
Muchas funciones representan las variaciones de algún comportamiento a lo largo del tiempo. Esta idea natural de variación, que experimentamos segundo a segundo, nos conduce a la imagen dinámica de una gráfica como un registro «sincrónico» de los valores alcanzados por una determinada variable. El *applet* permite observar con toda facilidad la génesis de cada punto de la gráfica en exacta correspondencia con el valor de la variable analizada (dependiente) en un momento dado (independiente). También confiere significado a la interpretación conjunta de dos gráficas e introduce la periodicidad de manera natural.



Al igual que algunas otras actividades presentes en el bloque de funciones, esta actividad de la noria es una versión dinámica e interactiva de la que se expone en el libro *El lenguaje de funciones y gráficas* (Shell Centre, 1990). La capacidad de animación e interactividad que permiten los *applets* propicia una mejor comprensión de las distintas representaciones. Naturalmente, esta ayuda será mayor, la agradeceremos más, cuanto mayor sea nuestra dificultad en crear imágenes mentales adecuadas a ciertas características más o menos abstractas, como propiedades conservadas por algunas figuras o relaciones, simetrías o patrones velados, o procesos regidos por algún modelo invisible. Pero incluso si disponemos de cierta facilidad para transformar conceptos abstractos en imágenes mentales, la visualización del proceso dinámico nos ayuda a perfilarlas más nitidamente.

### Funciones iguales y funciones simétricas

Esta actividad nos acerca a las «súper igualdades», esto es, a las igualdades funcionales, válidas para cualquier valor particular de la variable independiente. En concreto, aquí se usan para determinar algunas simetrías que pueden observarse en las propias gráficas (funciones pares e impares) o entre unas gráficas y otras (funciones mutuamente «inversas» o «recíprocas»). En el primer caso, la igualdad se visualizará como superposición de la gráfica de la función y su simétrica (axial o central).



El desarrollo de esta actividad podría realizarse sin el apoyo visual e interactivo que ofrece el *applet*. Pero su uso ofrece importantes ventajas: la conexión entre la representación gráfica y algebraica se evidencia en todo momento, para cualquier función y cualquier punto elegido. Es más, la percepción de las interconexiones funcionales y geométricas alcanza, como consecuencia de la visualización y manipulación, tal intensidad, que en ocasiones resulta difícil precisar en qué campo nos estamos moviendo.

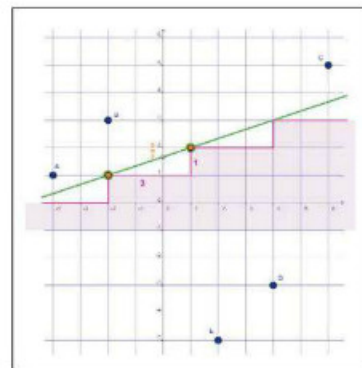
### Actividad 3: Funciones concretas

En esta sección se plantean actividades encaminadas al análisis de ciertas funciones elementales presentes en el currículo de la ESO: lineal y afín, cuadrática, de proporcionalidad inversa, expo-

nencial y logarítmica. A su vez, podemos diferenciar entre actividades empíricas y analíticas. Las primeras atienden a la exploración de situaciones en donde surgen ese tipo de funciones, mientras que las segundas se ocupan de las conexiones matemáticas inherentes al estudio de las funciones como tales.

### Pendiente y ordenada en el origen

En esta actividad se muestran cinco puntos fijos, de coordenadas enteras, en el plano cartesiano, y una recta que pasa por dos puntos móviles que podemos resituar en cualquier punto (también de coordenadas enteras). En todo momento se muestra la «escalera» resultado de trasladar el «peldaño» determinado por los dos puntos móviles. Manipulando esos puntos y observando la escalera, debemos averiguar la ecuación de cada una de las diez rectas distintas que pasan por cada par de puntos (ya que no hay tres alineados).



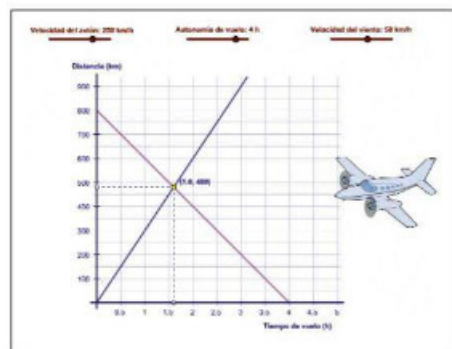
Además de las facilidades de visualización y manipulación, el *applet* de este ejemplo incorpora un sistema de autoevaluación que permite verificar la corrección de las respuestas introducidas en cada celda de la hoja de cálculo de GeoGebra.

Podemos aprovechar muchas actividades para realizar distintas versiones de ellas de forma sencilla. Por ejemplo, en esta actividad basta cambiar la posición de los cinco puntos iniciales en la construcción GeoGebra para poder ofrecer otro ejercicio similar, pues el sistema de autoevaluación es independiente de las posiciones elegidas. En las actividades basadas en construcciones más complejas, podemos optar por aprovechar el *applet* original creando cuestionarios alternativos. Algunos *applets* son, de hecho, tan polivalentes, que han sido etiquetados como «multiusos».

### El punto de no retorno

Al estudiar las relaciones de dependencia entre distintas variables implicadas en un fenómeno, resulta de mucha ayuda poder observar su comportamiento bajo distintas condiciones, mediante

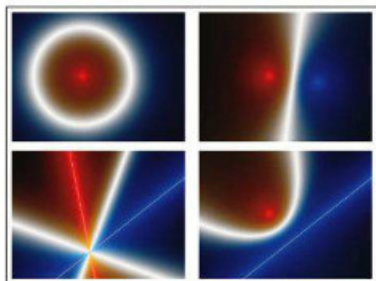
simulaciones. Actualmente, los métodos de simulación se emplean en innumerables investigaciones de toda índole (médicas, industriales, logísticas, medioambientales, económicas, etc.), tanto por su eficacia como por su adaptabilidad y bajo coste.



Los deslizadores presentes en el *applet* de esta actividad nos permiten modificar a nuestro antojo (y sin peligro) las condiciones del experimento. La superposición de gráficas y la observación de los distintos resultados obtenidos nos dirigen hacia una formulación de la interdependencia de las variables que nos permite calcular, con precisión creciente, el punto a partir del cual un avión carece de suficiente combustible para volver a su base.

### La función cuadrática en 10 pasos

Tras este título nos encontramos, en realidad, con una colección de diez actividades de carácter analítico. Cada actividad del Proyecto Gauss es autónoma, no necesita del resto para su correcta interpretación y realización. Sin embargo, en algunos casos especiales como este, se ha decidido hilar una serie de actividades en las que su realización colectiva posee más valor que la suma de las realizaciones individuales. Bajo la denominación de «pasos», esas actividades se hallan estrechamente enlazadas y cuidadosamente ordenadas para alcanzar esa plusvalía.



El hilo conductor de esta colección va de la geometría a las funciones. Comienza con la exploración de la gráfica parabólica como lugar geométrico, al que se dedican las cuatro primeras actividades. En la primera podemos usar un rápido método de generación de mapas de color que asigna a cada punto del plano un determinado color según la relación métrica deseada. Este método es resultado de una investigación<sup>11</sup> realizada en el IGC sobre el uso del comando «Color dinámico» de GeoGebra. Algunas de las imágenes obtenidas por este medio ofrecen gran belleza plástica.

Una vez conocidas algunas características de la parábola, se procede a integrarla en el sistema de coordenadas y se busca la expresión algebraica correspondiente a la dependencia funcional que deben cumplir las coordenadas de cada punto de la gráfica.

Esta orientación ofrece varias ventajas. Por una parte, la conexión entre funciones y geometría es fuerte y evidente. Por otra, se adquieren sencillos procedimientos algebraicos para abordar algunos problemas, como resolver ecuaciones completas de segundo grado sin recurrir a la famosa fórmula o, incluso, hallar la ecuación de la recta tangente en cualquier punto sin saber derivar.

Realizar esta colección de diez actividades requiere prever un tiempo razonable para su recorrido, ya que son diversos y sutiles los conceptos que se conjugan y muchas las preguntas que se formulan. Sin embargo, una vez más, la combinación del aporte visual, dinámico e interactivo de los *applets* con los cuestionarios dirigidos de dificultad gradual aumenta enormemente las posibilidades de no desfallecer en el intento.

### Conclusiones

Seguramente, el mayor valor que ofrecen los *applets* es la facilidad con que invitan a la exploración y a la investigación particular. Al usarlos, nos convertimos en directores de escena y protagonistas de nuestro aprendizaje.

El beneficio obtenido con su uso es, en gran parte, fruto de nuestro propio esfuerzo. La simple manipulación de un *applet* exige un mínimo de atención, algo que no está garantizado en el público asistente a una conferencia, por ejemplo (aunque, si el *applet* nos resulta atractivo, es probable que no seamos conscientes de la atención prestada). A su vez, el cuestionario impulsa una y otra vez a una exploración más profunda de

cada escena, reavivando nuestra curiosidad e interés por encontrar una solución a la situación planteada.

Como consecuencia de nuestra exploración, el *applet* también nos incita a la comunicación de los descubrimientos realizados. La mayoría de las actividades del Proyecto Gauss admiten diversas for-

Seguramente, el mayor valor que ofrecen los *applets* es la facilidad con que invitan a la exploración y a la investigación particular. Al usarlos, nos convertimos en directores de escena y protagonistas de nuestro aprendizaje

mas de aproximación, argumentación y comprobación o refutación de nuestras propias observaciones. Incluso, en un entorno de aprendizaje en grupo, puede ser recomendable establecer un tiempo mínimo para que todos podamos explorar sin prisas los diferentes escenarios antes de compartir nuestras observaciones.

Otra característica de gran valor propia de los *applets* es la retroalimentación que resulta de la interactividad con el sistema. A cada acción nuestra le corresponde una reacción de los elementos en escena. La observación de esta reacción nos provoca nuevas acciones. Además, estas nuevas acciones no son aleatorias –si a veces lo son, es porque todavía estamos «tanteando» el terreno– sino que van encaminadas, acuciadas por el cuestionario, a conseguir un estado de la escena acorde con nuestros deseos o a reinterpretar las relaciones de los elementos en juego. Esta continua retroalimentación entre nuestras acciones y sus consecuencias, además de acentuar nuestra sensación de protagonismo, favorece un tipo de aprendizaje basado más en la experiencia, en la observación y comprobación, que en la memorización y repetición de procedimientos predefinidos.

Cada actividad del Proyecto Gauss se caracteriza por añadir a la visualización, animación e interacción que permite el *applet* una intención definida. El texto introductorio facilita el acercamiento a la situación, pero en la mayoría de los casos es el texto de cada pregunta el que perfila las

Otra característica de gran valor propia de los *applets* es la retroalimentación que resulta de la interactividad con el sistema

líneas de acción. La interpretación correcta de estos textos es esencial y exige, de nuevo, el consiguiente esfuerzo de atención por nuestra parte. Como sabemos, es habitual que, en matemáticas, la dificultad de la correcta

comprensión de los textos no estribe en su extensión sino en la extrema precisión en el uso de los términos. La brevedad de los textos debe animarnos a releer el texto, varias veces si es preciso. Con frecuencia, los pocos segundos invertidos en ello pueden ahorrarnos muchos minutos de acciones inconsistentes con el tipo de actividad que se pretende que realicemos.

Finalmente, los *applets* favorecen muy distintos tipos de interconexiones: entre imágenes estáticas y dinámicas, entre imágenes físicas y mentales, entre diferentes conceptos y representaciones, entre matemáticas y realidad, entre distintas áreas de las matemáticas o entre estas y otras áreas del conocimiento, entre orden y belleza, entre percepción y lógica... La riqueza de estas interconexiones favorece una visión de las matemáticas más abierta y profunda, más cultural, más humana.

### Notas

1. <http://geogebra.org>
2. Véase situación actual en [www.geogebra.org/cms/es/community](http://www.geogebra.org/cms/es/community)
3. Associació Catalana de GeoGebra, Instituto GeoGebra (IG) de Cantabria, IG de Andalucía, IG de Madrid, IG de Galicia. Ver sus direcciones web en el enlace de la nota anterior.
4. <http://recursostic.educacion.es/gauss/web>
5. <http://ite.educacion.es>
6. <http://plane.gob.es/escuela-20>
7. <http://geogebra.es>
8. Castro Urdiales, Cantabria, [www.ciem.unican.es](http://www.ciem.unican.es)

9. <http://geometriadinamica.es>
10. [http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales\\_didacticos/materiales\\_didacticos.htm](http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/materiales_didacticos.htm)
11. R. Losada, [http://geogebra.es/color\\_dinamico/color\\_dinamico.html](http://geogebra.es/color_dinamico/color_dinamico.html)

### Referencias bibliográficas

- LOSADA, R (2007): «GeoGebra: la eficiencia de la intuición». *Gaceta de la RSME*, vol. 10(2), pp. 223-239.
- SHELL CENTER FOR MATHEMATICAL EDUCATION (1990): *El lenguaje de funciones y gráficas*. Bilbao. MEC / Universidad del País Vasco.

### Referencias de los autores

José Luis Álvarez García  
Rafael Losada  
Instituto de Tecnologías Educativas. Madrid  
[jluisag@educastur.princast.es](mailto:jluisag@educastur.princast.es)  
[rafaell@educastur.princast.es](mailto:rafaell@educastur.princast.es)

*Líneas de trabajo:* creación de recursos educativos digitales de apoyo a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

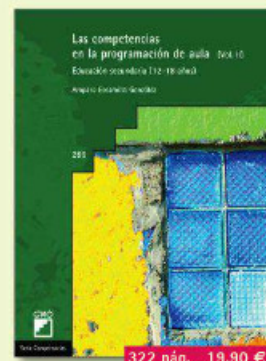
Este artículo fue solicitado por UNO. REVISTA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS en enero de 2011 y aceptado en abril de 2011 para su publicación.

## LAS COMPETENCIAS EN LA PROGRAMACIÓN DE AULA Educación secundaria (12-18 años)

(Vol. II)

AMPARO ESCAMILLA GONZÁLEZ

Cómo llevar a la práctica la programación por competencias en el aula de secundaria: qué debemos tener en cuenta en esta etapa, claves esenciales, sugerencias y propuestas para el aula. Enfoque vinculado al principio de aprendizaje significativo, a las alternativas interdisciplinares, a la estrategia de trabajo por proyectos y a las técnicas para aprender a aprender. Se articula perfectamente con las etapas anteriores. También constituye una herramienta ágil y eficaz para orientadores, tutores y profesores, así como a los formadores del máster de secundaria y a los opositores que han de elaborar programaciones y unidades didácticas incorporando las competencias básicas.



**GRAO** C/ Hurtado, 29  
08022 Barcelona (España) Tel.: (34) 934 080 464  
[www.grao.com](http://www.grao.com)  
[graoeditorial@grao.com](mailto:graoeditorial@grao.com)